

30/09 Особый случай в задаче Ш-Л.
 Смешанная задача д/уравнения теплопроводности.

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0$$

(1) $\Gamma_0(u) = 0, \quad \Gamma_l(u) = 0,$
 $u(x, 0) = \varphi(x)$
 $u = u(x, t) = ?$

В ШЛ: $X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad 0 \leq x \leq l,$
 (2) $\Gamma_0(X) = 0, \quad \Gamma_l(X) = 0,$

где Γ_0, Γ_l — классич. кр. опер-ры из зад. (1)
 Покажем, что с.зн. $\lambda_0 = 0$ возникает
 только, if оба оператора Γ_0 и Γ_l — 2го рода

Общ. запись классич. кр. операторов д/уравнения ШЛ (2): $\Gamma_0(X) = \alpha_0 X'(0) - \beta_0 X(0),$
 $\Gamma_l(X) = \alpha_1 X'(l) + \beta_1 X(l),$
 где $\alpha_k \geq 0, \beta_k \geq 0, \alpha_k + \beta_k > 0$ при $k = 0, 1$

$\lambda_0 = 0$ — с.зн. д/уравнения (2) $\Rightarrow X''(x) = 0 \Rightarrow X(x) = Ax + B$ — нетривиал. реш., т.е. $|A| + |B| > 0$

Подставим в кр. усл. $X(x) = Ax + B,$
 $X'(x) = A:$ $\Gamma_0(X) = \alpha_0 A - \beta_0 B = 0,$
 $\Gamma_l(X) = \alpha_1 A + \beta_1 (Al + B) = 0$

Возникает однород. с-ма:

$$\begin{cases} \alpha_0 A - \beta_0 B = 0, \\ (\alpha_1 + \beta_1 l) A + \beta_1 B = 0 \end{cases}$$

Это усл., $\exists$ нетривиал. реш. $(A, B) \neq (0, 0)$
 $\Rightarrow \det = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \alpha_0 & -\beta_0 \\ \alpha_1 + \beta_1 l & \beta_1 \end{vmatrix} = \alpha_0 \beta_1 + \beta_0 (\alpha_1 + \beta_1 l) = 0$.
Все числа здесь неотриц. $\Rightarrow$
 $\Rightarrow \alpha_0 \beta_1 = 0$

$\beta_0 (\alpha_1 + \beta_1 l) = 0$. Но $\alpha_1 + \beta_1 l > 0$ (по усл.) $\Rightarrow$
 $\Rightarrow \beta_0 = 0 \Rightarrow \alpha_0 > 0 \Rightarrow \beta_1 = 0$. Итак, $\alpha_0 > 0$,
 $\alpha_1 > 0$, $\beta_0 = 0$, $\beta_1 = 0 \Rightarrow \Gamma_0, \Gamma_l$ — операторы
эго рода. При этом из с-мы $\Rightarrow$ что
 $A = 0, B \neq 0 \Rightarrow A_0 = 0$ — с.зн. с с.ф. $X(x) \equiv 1$.

Итак, случай кр. усл. эго рода осо-
бый. ВММ $X'(x) + A X(x) = 0, 0 \leq x \leq l$,
 $X'(0) = 0, X'(l) = 0$

имеет спектр: $A_0 = 0, X_0(x) \equiv 1, A_k = \left(\frac{\pi k}{l}\right)^2$,
 $X_k(x) = \cos \frac{\pi k x}{l}, k = \overline{1, \infty}$
 $(\|X_0\|^2 = l, \|X_k\|^2 = l/2, k = \overline{1, \infty}) \Rightarrow$ смешан-
ная задача:

$$U_t = a^2 U_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0,$$

$$U_x(0, t) = U_x(l, t) = 0,$$

$$U(x, 0) = \varphi(x)$$

имеет реш. вида:

$$U(x, t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{-\left(\frac{\pi k a}{l}\right)^2 t} \cos \frac{\pi k x}{l}, \quad \text{где}$$

$$A_0 = \frac{1}{l} \int_0^l \varphi(x) dx, \quad A_k = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \cos \frac{\pi k x}{l} dx, \quad k = \overline{1, \infty}$$

If $t \rightarrow +\infty$, то $U(x, t) \rightarrow A_0$ равномерно

на $[0, l]$. Здесь $A_0 = \frac{1}{l} \int_0^l \varphi(x) dx$. средняя температура в начал. момент времени

Однород. пр. усл. 2-го рода соотв-т теплоизолированным границам. Взаимодействие с окр. средой не происходит, тепло перераспределяется ^{только} внутри стержня, выравниваясь к сред. знач-ю температуры в начал. момент времени.

Во всех остальных случаях с. зн. строю

$$> 0: \underbrace{0 < A_1 < A_2 < \dots < A_n < \dots < +\infty}_{\text{не с. зн.}} \quad \text{Общ. реш.}$$

$$\text{зад. (1) имеет вид: } U(x, t) = \sum_k A_k e^{-a^2 \lambda_k^2 t} \cdot X_k(x).$$

При этом $U(x, t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$. Хотя

бы 1 край не теплоизолирован, стержень со временем остывает до 0-й температу-

ры окр среды

§. Обоснование метода Фурье (кратко)

* след. задачу: $\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & 0 < x < l, t > 0, \\ \Gamma_0(u) = 0, & \Gamma_l(u) = 0, \end{cases}$

$$(1) \quad \begin{cases} \Gamma_0(u) = 0, & \Gamma_l(u) = 0, \\ u(x, 0) = \varphi(x) \end{cases}, \text{ ф-ция}$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \text{ ф-ция}$$

$\varphi(x)$ задана, $u = u(x, t) = ?$

Γ_0, Γ_l — классич. кр. операторы

Методом Фурье получим формальное

реш. зад. (1): $u(x, t) = \sum_k A_k e^{-a^2 \lambda_k^2 t} X_k(x)$,

где $A_k, X_k(x), \forall k$ — спектр ЭМД, $A_k =$

$$= \frac{1}{\|X_k\|^2} \int_0^l \varphi(x) X_k(x) dx, \forall k. \text{ Запишем ф-лу}$$

(2) дост. усл.: $\int_0^l |\varphi(x)| dx < \infty$ ($\varphi(x) \in L^1_+(0, l)$)

Когда формал. реш. (2) будет классическим?

Итерные рез-ты: $\Downarrow$ Γ_0, Γ_l — классич. кр.

опер-ры, $\varphi \in C^2[0, l]$, причем $\Gamma_0(\varphi) = 0$,

$\Gamma_l(\varphi) = 0 \Rightarrow$ ф-ла (2) определяет классич.

реш. зад. (1)

$$u \in C^{2,1}([0, l] \times (0, +\infty)) \cap C([0, l] \times [0, +\infty))$$

(на самом деле $u \in C^\infty([0, l] \times (0; +\infty)) \cap C([0, l] \times [0, +\infty))$)

▲ Схема док-ва:

I) Используя усл. на $\varphi(x)$, доказ-ся абс. и равномерн. с-ть ряда (2) при $t=0$ к ф-ции $\varphi(x)$ на $[0, l]$ (↓ Стеклова)

// док-во в книге Н //

II) Доказ-ся (на основе признака Вейерштрасса), что при $t > 0$ с-ть ряда (2) только улучшается, и ряд (2) можно почленно дифференцировать по x в совокупном перем. (x, t) ■

В случае прост. кр. усл. I можно дополнительно усилить.

Вариант д/ кр. усл. I ряда:

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0,$$

$$u(0, t), u(l, t) = 0, \quad (1.1)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x)$$

Форм. реш.: (2.1) $u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{-\left(\frac{\pi k a}{l}\right)^2 t} \sin \frac{\pi k x}{l},$

где $A_k = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{\pi k x}{l} dx$

↓ $\varphi \in C^1[0, l]$, причем $\varphi_0 = 0, \varphi(l) = 0$. Тогда

ф-ла (2.1) определяет классич. реш. зад. (1.1)
в классе $u \in C_{\uparrow C^\infty}^{2,1}([0, l] \times (0, +\infty)) \cup ([0, l] \times$
 $\times [0, +\infty))$

▲ Без дек-ва ■ // Док-во как дополнение

! Зам. Даже if φ — „плохая“ ф-ция
не из указ. классов, то при $t > 0$ ф-ны
(2) и (2.1) дают очень хорошие классич.
ф-ции, удовл. поставл. задачам. Проблемы
могут возникнуть только при $t = 0$